



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

AN ȘCOLAR 2024 – 2025

ETAPA LOCALĂ

08.02.2025

CLASA a VII – a

BAREM

Subiectul I

a) $card(A \cap \mathbb{Q}) = 20$, deci $A \cap \mathbb{Q} = \{26, 27, 28, \dots, 45 = \sqrt{2025}\} \dots\dots\dots 2p$

$\sqrt{676} = 26, \sqrt{625} = 25$, deci $n \in \{626, 627, 628, \dots, 676\} \dots\dots\dots 2p$

b) $\sqrt{k} + \sqrt{m} = x + y \in (B \cap \mathbb{Q})$ implică $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{m} \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$

$B \cap \mathbb{Q} = \{2, 3, 4, \dots, 90\}$, deci B conține 89 elemente rationale. $\dots\dots\dots 2p$

Subiectul II

Metoda 1

EF mediană în triunghiul dreptunghic BDF, deci EF=BE $\dots\dots\dots 2p$

Triunghiul BEF este isoscel, deci $\widehat{EBF} = \widehat{EFB} \dots\dots\dots 2p$

ABCD trapez isoscel, deci $\widehat{EBF} = \widehat{CAB} \dots\dots\dots 1p$

Prin tranzitivitate rezultă $\widehat{EFB} = \widehat{CAB}$, deci AC și EF sunt paralele $\dots\dots\dots 2p$

Metoda 2

$CE \cap AB = \{G\}$

Triunghiurile DEC și BEG sunt congruente(ULU), deci CE=EG $\dots\dots\dots 2p$

E=mijl BD=mijl CG, deci BCDG paralelogram, deci BC=DG $\dots\dots\dots 1p$

ABCD trapez isoscel, deci BC=AD, de unde AD=DG $\dots\dots\dots 1p$

În triunghiul isoscel ADG, înălțimea DF este și mediană, deci F=mijl AG $\dots\dots\dots 1p$

În triunghiul ACG, EF este linie mijlocie, deci AC și EF sunt paralele $\dots\dots\dots 2p$

Subiectul III

Metoda 1

Notăm $AB=x$

$$\frac{Aria(AF_1E_1D)}{Aria(BF_1E_1C)} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{\frac{x(AF_1+E_1D)}{2}}{\frac{x(BF_1+E_1C)}{2}} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{AF_1+E_1D}{BF_1+E_1C} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{AF_1+E_1D}{2x} = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow AF_1 + E_1D = \frac{4x}{5} \dots\dots\dots 2p$$



Analog, $AF_2 + E_2D = \frac{4x}{5}$ și $AF_3 + E_3D = \frac{4x}{5} \rightarrow F_1F_2 = E_1E_2$ 2p

E_1E_2 și F_1F_2 sunt paralele și congruente, deci $E_1E_2F_1F_2$ paralelogram și E_1F_1 și E_2F_2 au același mijloc1p

Analog, E_1E_3 și F_1F_3 sunt paralele și congruente, deci $E_1E_3F_1F_3$ paralelogram și E_1F_1 și E_3F_3 au același mijloc1p

dreptele E_1F_1 , E_2F_2 și E_3F_3 sunt concurente1p

Metoda 2

Notăm cu M și N, mijloacele laturilor AD, respectiv BC și cu P_1 , intersecția dreptelor E_1F_1 și MN. Demonstrăm că MP_1 este linie mijlocie în AF_1E_1D și P_1N este linie mijlocie în BF_1E_1C 1p

$AB=x$, $\frac{Aria(AF_1E_1D)}{Aria(BF_1E_1C)} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{x MP_1}{x NP_1} = \frac{2}{3} \rightarrow MP_1 = \frac{2x}{5}$ 3p

Analog, $MP_2 = \frac{2x}{5}$, $MP_3 = \frac{2x}{5}$, deci $P_1 = P_2 = P_3 = P$,2p

dreptele E_1F_1 , E_2F_2 și E_3F_3 sunt concurente în P1p

Subiectul IV

a) $\frac{a+p}{a-p}$ este număr natural, deci $(a+p) \vdots (a-p)$ 1p

Cum $(a-p) \vdots (a-p)$, rezultă $(2p) \vdots (a-p)$, deci $(a-p) \in \{1, 2, p, 2p\}$

$a \in \{p+1, p+2, 2p, 3p\}$ 2p

b) $\frac{a+p}{a-p} \in \{2p+1, p+1, 2, 3\}$ iar 2 și 3 nu sunt pătrate perfecte.....2p

$2p+1 = k^2 \rightarrow 2p = (k-1)(k+1)$ fals1p

$p+1 = k^2 \rightarrow p = (k-1)(k+1) \rightarrow p = 3$1p